СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ МФТИ
16 МАЯ 2021 ГОДА

1. Пусть матрица A квадратная, состоит из нулей и единиц, и кроме того, в каждой строке между любыми двумя единицами стоят только единицы. Докажите, что $|\det A| \leq 1$.

Решение. Докажем индукцией по количеству единиц и размеру матрицы. База индукции, когда матрица состоит из нулей или матрица имеет размер 1×1, очевидно выполняется.

Если в первом столбце единиц нет, то детерминант равен нулю из разложения по первому столбцу. Если в первом столбце одна единица, то разложение по первому столбцу сводит задачу к меньшей матрице.

Если же в первом столбце как минимум две единицы, то посмотрим на две строки, начинающиеся с единицы, и вычтем одну из другой, так, чтобы вычиталась строка с меньшим (или равным) количеством единиц. При этой процедуре в изменённой строке либо не будет единиц вообще, либо они всё ещё будут идти сплошной подстрокой. Тогда можно применить предположение индукции по количеству единиц.

2. Пусть (f_n) — равномерно ограниченная последовательность монотонных функций на отрезке $[a, b]$. Докажите, что из неё можно выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Решение. Пусть все функции возрастают, этого можно добиться переходом к подпоследовательности и, возможно, сменой знака. Пусть $(r_j)_j$ — последовательность всех рациональных чисел на отрезке $[a, b]$, а также самих числе a и b. Мы можем перейти к подпоследовательности функций $f_{n_{k,1}}$, так чтобы значения $(f_{n_{k,1}}(r_1))_k$ сходились. Далее перейдём ещё раз к подпоследовательности $f_{n_{k,2}}$, так чтобы значения $(f_{n_{k,2}}(r_2))_k$ тоже сходились, и т.д. Получаем последовательность вложенных друг в друга подпоследовательностей $(f_{n_{k,j}})_k$ при $j \in \mathbb{N}$ со свойством: $(f_{n_{k,j}}(r_i))_k$ сходится при $i \leq j$.

Тогда получается, что «диагональная» подпоследовательность $g_k = f_{n_{k,k}}$ поточечно сходится в каждой рациональной точке отрезка $[a, b]$ и в его концах к некоторой функции $g : [a, b] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Функция g будет возрастать как предел возрастающих. Продолжим g до какой-то возрастающей функции на всём отрезке, можно например положить для иррациональных $x \in (a, b)$

$$g(x) = \sup\{g(r) \mid r \in \mathbb{Q} \cap (a, b)\}.$$

Тогда, если g непрерывна в $x_0 \in [a, b]$, то для всякого $\delta > 0$ найдутся рациональные $r' < x_0 < r''$, для которых $g(r') > g(x_0) - \delta/2$ и $g(r'') < g(x_0) + \delta/2$. Из поточечной сходимости в рациональных точках мы видим, что при достаточно больших k также

$$g_k(r'), g_k(r'') \in (g(x_0) - \delta, g(x_0) + \delta).$$

Но тогда из монотонности g_k следует, что при достаточно больших k выходит $|g_k(x_0) - g(x_0)| < \delta$, то есть $g(x_0)$ также является поточечным пределом g_k в точке x_0.

Остаётся разобраться с точками разрыва g, в них g_k может и не сходиться поточечно к g. Но так как их всего не более чем счётное число, то можно их занумеровать как (x_i) и ещё раз применить рассуждение из начала доказательства, выбрав из последовательности (g_n) подпоследовательность, уже сходящуюся в этих точках.

Замечание. Задача может быть объяснена и на более абстрактном уровне. Функцию f_n (возрастающую) можно рассматривать как функцию распределения конечной борелевской меры на отрезке. Тогда утверждение задачи по сути следует из теоремы Риса и теоремы Банаха–Алаоглу о $*$-слабой компактности шара в пространстве $(C[a,b])^*$ непрерывных линейных функционалов, надо только вывести секвенциальную компактность из топологической компактности в этом пространстве.

3. Найдите минимальное число c_n (зависящее от натурального n) со следующим свойством. Для любого выпуклого (замкнутого) тела $K \subset \mathbb{R}^n$ с центром симметрии в начале координат, которое содержит ровно m точек с целыми координатами, любой параллельный перенос тела K содержит не более $c_n m$ точек с целыми координатами.

Решение. Константа c_n не менее 2^n, так как куб $[-1/2, 1/2]^n$ содержит одну целую точку, а его параллельный перенос $[0,1]^n$ содержит 2^n целых точек.

Покажем, что на самом деле $c_n = 2^n$. Предположим противное, что некоторое центрально симметричное выпуклое тело K содержит m точек, а его параллельный перенос K' содержит более $2^n m$ точек с целыми координатами. Тогда по принципу Дирихле в K' найдётся строго больше m точек с целыми координатами одной и той же чётности. Иначе говоря, K' пересекает некоторой параллельный перенос удвоенной целочисленной решётки, $2\mathbb{Z}^n + u$, $u \in \{0,1\}^n$.

Уменьшив картинку в два раза, мы получим, что некоторая уменьшенная копия $K'' = 1/2K + t$ содержит множество S из более чем m точек с целыми координатами. Заметим, что из центральной симметричности K следует, что

$$K - K := \{x - y \mid x, y \in K\} = 2K \Rightarrow K'' - K'' = K \supset S - S.$$

Но множество разностей $S - S$ состоит из целых точек и имеет не менее $|S|$ элементов (это понятно, если фиксировать один из элементов разности). Выходит, что в K более m точек с целыми координатами — противоречие.

4. Пусть $\{v_j\}_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ — некоторый набор единичных векторов. Докажите, что матрица с компонентами $(n(v_i \cdot v_j)^2 - 1)_{i,j=1}^m$ является положительно полуопределённой.

Решение. Продолжим скалярное произведение в данном $\mathbb{R}^n$ на его тензорный квадрат и будем обозначать g. Тогда рассматриваемая матрица имеет компоненты $ng(v_i \otimes v_i, v_j \otimes v_j) - 1$ и её положительную полуопределённость можно записать как неравенство

$$\sum_{i,j=1}^m n c_i c_j g(v_i \otimes v_i, v_j \otimes v_j) \geq (c_1 + \cdots + c_m)^2$$

для любых действительных $c_1, \ldots, c_m$. Это неравенство можно переписать как

$$ng\left(\sum_{i=1}^m c_i v_i \otimes v_i, \sum_{i=1}^m c_i v_i \otimes v_i\right) \geq (c_1 + \cdots + c_m)^2.$$

Определим тензор $C = \sum_{i=1}^m c_i v_i \otimes v_i$, тогда в левой части неравенства стоит $ng(C, C)$. Рассмотрим также тензор $I = \sum_{j=1}^n e_i \otimes e_i$ для стандартного ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $g(I,I)=n$ и

$$g(C,I)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_i(v_i\cdot e_j)^2=\sum_{i=1}^{m}c_i,$$

так как $\sum_j (v_i\cdot e_j)^2=1$ в силу нормированности v_i.

Тогда требуемое неравенство оказывается неравенством Коши–Буняковского

$$g(I,I)g(C,C)\geq g(C,I)^2,$$

которое следует из положительной определённости g.

Замечание При $\alpha<n$ матрица $(\alpha(v_i,v_j)^2-1)_{i,j=1}^m$ может не быть положительно полуопределённой. Так, если $m=n$ и векторы v_i составляют ортонормированный базис, данная матрица равна $\alpha I-J$, где J — матрица из одних единиц. Такая матрица обладает собственным числом $\alpha-n$ (с собственным вектором из одних единиц) и потому не является положительно полуопределённой.