

# Условия и ответы первого этапа

Тинькофф Образование

## Математический анализ

1. Рассмотрим множество точек  $(x, y)$  на плоскости таких, что  $0 \leq x \leq 10$  и существует остроугольный треугольник, периметр которого равен  $x$ , а площадь равна  $y$ . Найдите площадь этого множества. Ответ округлите с точностью до целого.

**Ответ: 16**

2. Сумма нескольких положительных чисел равна 18, сумма их квадратов равна 36. Найдите меру множества значений, которые может принимать сумма кубов этих чисел.

**Ответ: 144**

3. Выражение

$$\left[ \frac{1}{n - ne(1 - \frac{1}{n})^n} \right]$$

может принимать конечное количество значений при целых положительных  $n$ . Найдите, пожалуйста, их сумму.

**Ответ: 1.**

4. Как известно, если знать сумму трёх чисел  $x, y, z = p$ , сумму их попарных произведений —  $q$ , а так же их произведение  $r$ , можно найти сами числа, а значит и сумму их десятых степеней. Таким образом получается некоторая функция  $F(p, q, r) = x^{10} + y^{10} + z^{10}$ . А найдите, пожалуйста,

$$\frac{\partial F(p, q, r)}{\partial r} \Big|_{x=1, y=2, z=3}.$$

**Ответ: 93300.**

5. Рассмотрим множество вогнутых функций  $\mathcal{F} = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ причём } f(0) = 1\}$ . Найдите

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \left\{ \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 - 3 \int_0^1 x^4 f(x) dx \right\}.$$

**Ответ: 0.15.**

## Способы и вероятность

1. У скольких делителей числа  $2016^{2016}$  ровно 2016 натуральных делителей?

**Ответ: 378.**

2. Студенту нужно выполнить задание. Из-за того, что иногда ему свойственна прокрастинация, каждый день он независимо от остальных дней делает долю задания, равномерно распределённую на отрезке  $[0; 1]$ . Сколько в среднем дней у него займёт выполнение задания? Ответ округлите с точностью до пятого знака после запятой по правилам математики.

**Ответ: 2.71828.**

3. На каждом ребре тетраэдра единичного объёма случайно равномерно распределённо выбирается точка. Выбор на разных рёбрах независимый. Найдите математическое ожидание объёма многогранника с вершинами в этих точках.

**Ответ: 0.5.**

4. Сколькими способами можно расставить числа 1, 2, 3, 4 в клетки доски  $10 \times 10$ , чтобы в каждом квадрате  $2 \times 2$  были клетки со всеми числами?

**Ответ: 12264**

5. Имеется доска  $13 \times 13$ , каждая клетка которой покрашена в чёрный или белый цвет. За один ход можно перекрасить (то есть белые заменить на чёрные, а чёрные — на белые) все клетки одного квадрата  $2 \times 2$  или  $9 \times 9$ . Известно, что можно получить  $2^n$  разных раскрасок. Найдите  $n$ .

**Ответ: 153.**

## Числа

1. Найдите сумму всех составных целых положительных  $n$ , для которых  $(n-4)!$  не делится на  $n$ .

**Ответ: 19.**

2. Назовём множество  $S$ , состоящее из хотя бы двух натуральных чисел *хорошим*, если для любых  $a > b \in S$  число  $\frac{b^2}{a-b}$  тоже принадлежит  $S$ . Сколько хороших подмножеств в множестве чисел от 1 до миллиона?

**Ответ: 500000.**

3. Найдите наибольшее натуральное  $n$  для которого верно следующее: если  $m$  взаимно просто с  $n$ , то число  $m^{100} - 1$  делится на  $n$ .

**Ответ: 6666000**

4. Иногда число  $n^2$  можно представить в виде суммы квадратов одиннадцати последовательных натуральных чисел. Обозначим такие  $n$  в порядке возрастания как  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Верхний предел отношения  $\frac{n_{k+1}}{n_k}$  имеет вид  $a + \sqrt{b}$ , где  $a$  и  $b$  — рациональные числа. Найдите  $a + b$ .

**Ответ: 33.56, искомый предел равен  $27/5 + \sqrt{704/25}$ .**

5. Как известно, в периоде десятичной дроби  $\frac{1}{3^{2021}}$  ровно  $3^{2019}$  цифр. Рассмотрим этот период. Для каждой из тысячи комбинаций из трёх цифр выписали, сколько раз она в этом периоде встречается. Найдите сумму квадратов разностей 1000 полученных чисел.

**Ответ:  $248775 = 465 \cdot 535$**

## Комбинаторика

1. Компания из 22 человек собралась поиграть в футбол. В каждом матче они бились на две команды по 11 человек и играли друг против друга. После какого минимального числа матчей могло случиться так, что любые двое хотя бы раз играли в одной команде?

**Ответ: 4**

2. В графе 2021 вершина, а через каждое ребро проходит не более одного простого цикла (простой цикл — это цикл, не проходящий дважды ни по какой вершине). Какое наибольшее количество рёбер может в нём быть?

**Ответ: 3030**

3. В стране 2000 городов, любые два соединены самолётом, поездом или паромом. Для какого наибольшего  $k$  гарантированно можно выбрать  $k$  городов и один из видов транспорта так, чтобы из любого из этих  $k$  городов можно было этим видом транспорта добраться до любого другого?

**Ответ: 1000**

4. В каждой клетке квадрата  $2020 \times 2020$  стоит лампочка. Изначально некоторые лампочки включены, некоторые выключены. За один ход можно выбрать строчку или столбец, в которой горят хотя бы 1010 лампочек и поменять состояния всех лампочек. Для какого наименьшего натурального  $k$  верно условие: из любого начального положения можно получить ситуацию, в которой горит не более  $k$  лампочек

**Ответ:**  $2038180 = 1009 \cdot 2020$ .

5. В стране  $N$  городов. Три года подряд проверяющий проезжает по всем ним в каком-то порядке. Для какого наименьшего  $N$  можно утверждать, что в какие-то два года какие-то 12 городов были посещены в одном и том же порядке?

**Ответ:** 1332

## Алгебра

1. Характеристические многочлены вещественных матриц размера  $2 \times 2$   $A$  и  $B$  совпадают. Но нет оператора, что в каком-то базисе он записывается матрицей  $A$ , а в каком-то — матрицей  $B$ . След матрицы  $A$  равен 10. А чему равен определитель матрицы  $B$ ?

**Ответ:** 25

2. Сколько существует действительных  $a$ , для которых существует нечётное число троек  $(x, y, z)$  действительных чисел, для которых  $(x-1)(y-1)(z-1) = 2$ ,  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3}$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = a$ ?

**Ответ:** 2

3. Последовательность  $a_i$  задана следующим образом  $a_0 = c$ ,  $a_{n+1} = \frac{3a_n - 2}{2a_n - 1}$ . Сколько существует таких действительных  $c$ , что  $a_{2021} = c^2 - 1$ ?

**Ответ:** 3

4. Для какого наибольшего  $n$  существуют  $n$  приведённых непостоянных многочленов с целыми коэффициентами, произведение которых при вычитании из  $x^{125} - x$  даёт многочлен, все коэффициенты которого делятся на 5?

**Ответ:** 45

5.  $A$  и  $B$  — вещественные матрицы размера  $100 \times 100$ . Известно, что  $(AB)^3$  — нулевая матрица. Какое наибольшее значение может принимать ранг матрицы  $(BA)^3$ ?

**Ответ:** 25