4). Пусть в линейном нормированном пространстве X для любой пары его элементов x, y справедливо тождество параллелограмма. Докажите, что функция двух переменных $x, y \in X$

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right)$$

определяет скалярное произведение в пространстве X

Решение. Аксиома 3:

$$(x,x) = \frac{1}{4}||x+x||^2 \geq 0$$

, и если $(x,x) = 0$, то $||x|| = 0$ и по аксиоме нормы x=0

Аксиома 1 (симметричность)

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||-(x-y)||^2\right) = (y,x)$$

Аксиома 2, часть 1: аддитивность. Надо доказать $(x+z,y) = (x,y) + (z,y)$

$$\frac{1}{4}\left(||x+z+y||^2 - ||x+z-y||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2\right) + \frac{1}{4}\left(||z+y||^2 - ||z-y||^2\right)$$

,что эквивалентно

$$||x+z+y||^2 + ||z-y||^2 + ||x-y||^2 = ||x+z-y||^2 + ||z+y||^2 + ||x+y||^2$$

Пытаемся исключить отсюда z с помощью двух равенств параллелограмма

$$\begin{cases} ||x+z+y||^2 + ||z-y||^2 = 2||\frac{x}{2}+z||^2 + 2||\frac{x}{2}+y||^2 \\ ||x+z-y||^2 + ||z+y||^2 = 2||\frac{x}{2}+z||^2 + 2||\frac{x}{2}-y||^2 \end{cases}$$

-получилось

$$2||\frac{x}{2}+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||\frac{x}{2}-y||^2 + ||x+y||^2$$

Подведем под правые части равенств параллелограмма для векторов $\frac{x}{2}+y, \frac{x}{2}$

$$2||\frac{x}{2}+y||^2 + 2||\frac{x}{2}||^2 + ||x-y||^2 = 2||\frac{x}{2}-y||^2 + 2||\frac{x}{2}||^2 + ||x+y||^2$$

$$||x+y||^2 + ||y||^2 + ||x-y||^2 = ||x-y||^2 + ||y||^2 + ||x+y||^2$$

-получили тождество.

Аксиома 2 часть 2 (однородность) надо доказать $(ax,y) = a(x,y)$

Для $a = 2$ доказано $(x+x,y) = 2(x,y)$

По индукции, если доказано для $a = n$, то $(x+nx,y) = (x,y) + (nx,y) = (n+1)(x,y)$ -для всех натуральных a доказано.

Доказано, что

$$(-x, y) = \frac{1}{4}(||y - x||^2 - ||y + x||^2) = -(x, y)$$

-для всех целых a доказано. Пусть $a = \frac{m}{n}$. Пользуясь только тем, что доказано для целых,

$$(\frac{m}{n}x, y) = m(\frac{1}{n}x, y) = \frac{m}{n}\left[n\left(\frac{1}{n}x, y\right)\right] = \frac{m}{n}\,(x, y)$$

-для всех рациональных a доказано. Пусть последовательность рациональных чисел $r_n \to a$

$$|a(x, y) - (ax, y)| = |(a - r_n)(x, y) - ((a - r_n)x, y)| \leq$$

$$\leq |a - r_n| \cdot |(x, y)| + \frac{1}{4}\left(||(a - r_n)x + y||^2 - ||y - (a - r_n)x||^2\right)$$

По неравенству треугольника для нормы (где-то оно должно было быть использовано!)

$$\begin{cases} ||(a - r_n)x + y|| \leq ||(a - r_n)x|| + ||y|| \\ ||(a - r_n)x + y|| + || - (a - r_n)x|| \geq ||y|| \end{cases}$$

Отсюда

$$|\left(||(a - r_n)x + y|| - ||y||\right)| \leq |a - r_n| \cdot ||x||$$

$$||(a - r_n)x + y|| \to ||y||$$

и аналогично

$$|\left(||y - (a - r_n)x|| - ||y||\right)| \leq |a - r_n| \cdot ||x|| \to 0$$

$$||y - (a - r_n)x|| \to ||y||$$

Поэтому и

$$\frac{1}{4}\left(||(a - r_n)x + y||^2 - ||y - (a - r_n)x||^2\right) \to \frac{1}{4}\left(||y||^2 - ||y||^2\right) = 0$$

Число $|a(x, y) - (ax, y)|$ оценивается величиной, стремящейся к 0 при $n \to \infty$, а так как само оно от n не зависит и неотрицательно, то может быть равно только 0.

Доказали

$$a(x, y) = (ax, y)$$

для любого действительного a

Все аксиомы выполняются, значит введено скалярное произведение.