Acta Math.,167 (1991), 107-126

Единственность и связанные аналитические свойства для уравнения Бенджамина-Оно -нелинейной задачи Неймана на плоскости.

C.J.AMICK , *J.F.TOLAND*
University of Chicago *University of Bath*
Illinois, U.S.A *Bath, U.K*

Изучая пришедшие извне, уединенные волны на стабильной во времени двухслойной поверхности совершенной жидкости бесконечной глубины, T.B.Benjamin [3] вывел псевдодифференциальное уравнение в виде

$$u(x)^2 - u(x) = F(u)(x), \quad x \in R, \qquad (1.1)$$

где

$$F(\xi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |k| e^{-ikx} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(z) e^{ikz} dz \right\} dk \qquad (1.2)$$

Далее он рассмотрел решения u с $|u| \to 0$ при $|x| \to \infty$(В данном изложении непространственные параметры нормализованы единицами). Уравнение (1.1) было позже обсуждено Ono[5] в связи с теорией солитонов. Фактически он вывел не зависящее явно от времени уравнение

$$u_t + u_x + 2uu_x - (L(u))_{xx} = 0 \qquad (1.3)$$

Здесь L означает преобразование Гильберта (Ono использовал конвенцию Stein -a [7] о знаках преобразования Гильберта), и ряд констант нормализованы единицами. Если решение (1.3) ищем в виде устойчивой суперкритической уединенной волны вида $u(x,t) = u(c_0 x - ct)$, то уравнение (1.3) сводится к

$$c_0^{-2}(c_0 - c)u + c_0^{-1}u^2 = (L(u))_x, \quad 0 < c_0 < c, \qquad (1.4)$$

(где постоянная интегрирования была взята нулем).Это дает формально из (1.1) для гладких функций u ,

$$L(u)_x = F(u),$$

с учетом, что ряд переменных, нормализующих (1.4), взяты 1 и -1 соответственно. (В 1967, уравнение (1.3) написано Бенджамином в версии с зависимостью от времени бегущей волны в уравнении (1), на чем его внимание было сфокусировано. В то же время Дэвис и Акривос вывели уравнение (1.4) в экспериментальном и численном изучении простых бегущих волн [4]. Уравнение (1.3), которое заново выведено Ono[5] с использованием формальных методов нелинейных возмущений в 1975, известно ныне как уравнение Бенджамина-Оно)